Profesor:
Ricardo Espino L.

ÁLGEBRA

GRUPO PITÁGORAS

DESIGUALDADES-INECUACIONES POLINOMIALES

DEFINICIONES

- DESIGUALDAD
- RELACIÓN DE ORDEN
- AXIOMAS DE ORDEN
- RECTA NUMÉRICA
- INTERVALOS

PROPIEDADES

- PROPIEDADES GENERALES
- DESIGUALDAD ENTRE MEDIAS
- DESIGUALDAD CAUCHY-SCHWARZ

INECUACIONES POLINOMIALES

- DEFINICIÓN Y FORMA
- MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

DESIGUALDADES

1.- DEFINICIÓN:

Comparación entre dos números reales mediante el uso de relaciones de orden.

2.-RELACIONES DE ORDEN

ESTRICTAS:

$>$ $\ldots$"*mayor que*"

$<$ $\ldots$"*menor que*"

NO ESTRICTAS

$\geq$ $\ldots$"*mayor o igual que*"

$\leq$ $\ldots$"*menor o igual que*"

*AXIOMAS

AXIOMA: Verdad evidente, indemostrable e indiscutible.

3.- AXIOMAS DE ORDEN

1.- Ley de Tricotomía

$\forall\ a, b\ \in\ \mathbb{R}$ se cumple solo una de las tres opciones

$$\begin{cases} a > b \\ a = b \\ a < b \end{cases}$$

2.- LEY DE TRANSITIVIDAD

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$$

3.- LEY DE ADICIÓN

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad a < b \rightarrow a + c < b + c$$

4.- LEY DE MULTIPLICACIÓN

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}^{+}\ a < b \rightarrow a.c < b.c$$

Consecuencia:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}^{-}\ a < b \rightarrow a.c > b.c$$

4.- RECTA NUMÉRICA

Se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta. A esta recta se le denomina Recta Real o Recta Numérica.

$$a \text{ es positivo} \leftrightarrow a > 0$$

$$a \text{ es negativo} \leftrightarrow a < 0$$

$$a \text{ es no positivo} \leftrightarrow a \leq 0$$

$$a \text{ es no negativo} \leftrightarrow a \geq 0$$

5.- INTERVALOS

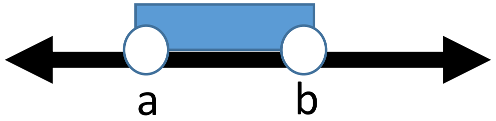
$$I \subset \mathbb{R} \text{ es un intervalo si cumple:}$$

$$\forall x, z \in I, \forall y \in \mathbb{R}, [x < y < z \rightarrow y \in I]$$

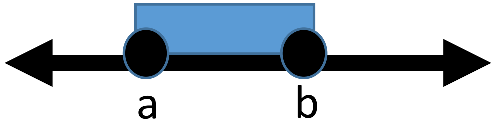
6.- TIPOS DE INTERVALO

- **INTERVALOS**
  - **ACOTADOS**
    - **ABIERTO**
    - **CERRADO**
    - **SEMIABIERTO/SEMICERRADO**
  - **NO ACOTADOS**
    - **ACOTADO SUPERIORMENTE**
    - **ACOTADO INFERIORMENTE**

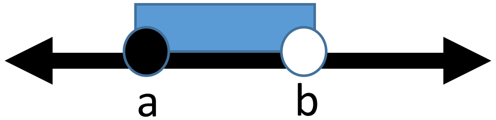
$$A = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$



$$B = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

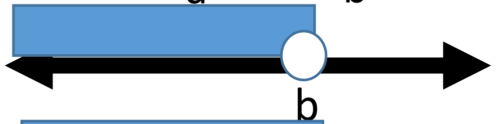


$$C = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

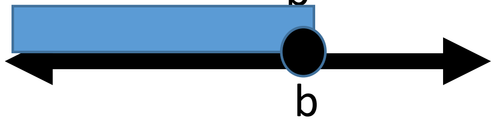


$$D = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$$



$$F = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$$



$$G = \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$$

6.- TIPOS DE INTERVALO

- **INTERVALOS**
  - **ACOTADOS**
    - **ABIERTO**
      - $A = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ $\quad A =]a; b[\,= < a; b >$
    - **CERRADO**
      - $B = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ $\quad B = [a; b]$
    - **SEMIABIERTO/SEMICERRADO**
      - $C = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ $\quad C = [a; b[\,= [a; b >$
      - $D = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$ $\quad D =]a; b] = < a; b]$
  - **NO ACOTADOS**
    - **ACOTADO SUPERIORMENTE**
      - $E = \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$ $\quad E =]-\infty; b[\,= < -\infty; b >$
      - $F = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$ $\quad E =]-\infty; b] = < -\infty; b]$
    - **ACOTADO INFERIORMENTE**
      - $G = \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$ $\quad G =]a; +\infty[\,= < a; +\infty >$
      - $H = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$ $\quad H = [a; +\infty[\,= [a; +\infty >$

PITAGORAS ACADEMIA

6.- PROPIEDADES

1.-
$$a > b \quad \wedge \quad c > d \quad \rightarrow \quad a + c > b + d$$

2.-
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 \geq 0$$

3.-
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+ \wedge x > y \quad \rightarrow x^2 > y^2$$

4.-
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^- \wedge x > y \quad \rightarrow x^2 < y^2$$

5.-
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \wedge x > y \quad \rightarrow x^3 < y^3$$

6.-
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge a < x < b \quad \rightarrow a^2 < x^2 < b^2$$

7.-
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^- \wedge a < x < b \quad \rightarrow b^2 < x^2 < a^2$$

8.-
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \wedge ab < 0 \wedge a < x < b \quad \rightarrow 0 \leq x^2 < \max\{a^2, b^2\}$$

9.-
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \wedge ab > 0 \wedge a < x < b \quad \rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$$

10.-
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \wedge ab < 0 \wedge a < x < b \quad \rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{a} \quad \vee \frac{1}{b} < \frac{1}{x}$$

APLICACIÓN:

$Sea\ x\ \in\ ]-1;4]$

$Indicar\ el\ intervalo\ de:\ \dfrac{1}{-x^2+4x-1}$

SOLUCIÓN:

$Sea\ x\ \in\ ]-1;4]\quad es\ decir: -1<x\leq 4$

$Ley\ de\ Adición:\qquad -3<x-2\leq 2$

$Propiedad\ \#8:\qquad 0\leq (x-2)^2<9$

$0\leq x^2-4x+4<9$

$Ley\ de\ Adición:\qquad -4\leq x^2-4x<5$

$Ley\ de\ Multiplicación:\qquad -5<-x^2+4x\leq 4$

$Ley\ de\ Adición:\qquad -6<-x^2+4x-1\leq 3$

$$Propiedad\ \#10:\quad \frac{1}{-x^2+4x-1}<-\frac{1}{6}\quad \vee\quad \frac{1}{3}\leq\frac{1}{-x^2+4x-1}$$

$$\frac{1}{-x^2+4x-1}\in\left]-\infty;-\frac{1}{6}\right[\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$$

7.- DESIGUALDADES ENTRE MEDIAS

$$\forall a_1, a_2, \dots . a_n \in \mathbb{R}^+ \wedge k \in \{2; 3; 4; \dots\} \quad :$$

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}$$

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n}} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \quad \leftrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

8.- TRINOMIO CUADRADO POSITIVO

$$Si\ ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \quad \rightarrow \quad a > 0 \ \wedge \ \Delta < 0$$

VARIACIONES

$$Si\ ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \quad \rightarrow \quad a > 0 \ \wedge \ \Delta \leq 0$$

$$Si\ ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \quad \rightarrow \quad a < 0 \ \wedge \ \Delta < 0$$

$$Si\ ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \quad \rightarrow \quad a < 0 \ \wedge \ \Delta \leq 0$$

9.- PROPIEDADES EXTRA Y DESIGUALDADES NOTABLES

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+}: \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}^{-}: \quad x + \frac{1}{x} \leq -2$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \quad \leftrightarrow x = y = z$$

$Desigualdad\ Cauchy - Schwarz$

$$\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}: \quad (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

$$a, b, x, y \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad (ax + by)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \quad \leftrightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

$$\forall a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}: \quad (ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad (ax + by + cz)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \quad \leftrightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

INECUACIONES POLINOMIALES

Forma:

$$P(x) \lesseqgtr 0$$

MÉTODO DE SOLUCIÓN: “MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS”

1.- El coeficiente principal del polinomio debe ser estrictamente positivo. Esto siempre se puede lograr, en caso de un coeficiente principal negativo, multiplicaremos a toda la desigualdad por -1.

2.- Hallar las raíces del polinomio utilizando factorización o fórmula general en polinomios de 2do grado.

3.- Ubicar dichas raíces en la Recta numérica, como puntos abiertos en caso de una desigualdad estricta y puntos cerrados en caso de una desigualdad no estricta.

4.- Trazar la curva de signos considerando:

a. La curva comienza siempre por la derecha con el signo positivo.
b. La curva de signos intersectará a todas las raíces en la recta numérica.
C. La curva de signos al pasar por una raíz simple o de multiplicidad impar, cambiará de signo
d. La curva de signos no cambiará de signo al pasar por una raíz de multiplicidad par.

5.- Identificar el intervalo o los intervalos solución como la unión de las zonas y puntos requeridos por la relación de orden de la desigualdad.

INECUACIONES RACIONALES

Forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \lesseqgtr 0$$

MÉTODO DE SOLUCIÓN: “MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS”

1.- El coeficiente principal de los polinomios deben ser estrictamente positivo. Esto siempre se puede lograr, en caso de un coeficiente principal negativo, multiplicaremos a toda la desigualdad por -1.

2.- Hallar las raíces de los polinomios utilizando factorización o fórmula general en polinomios de 2do grado.

3.- Ubicar dichas raíces en la Recta numérica, como puntos abiertos en caso de una desigualdad estricta y puntos cerrados en caso de una desigualdad no estricta. Considerar que las raíces de Q(x) siempre serán puntos abiertos.

4.- Trazar la curva de signos considerando:

a. La curva comienza siempre por la derecha con el signo positivo.

b. La curva de signos intersectará a todas las raíces en la recta numérica.

C. La curva de signos al pasar por una raíz simple o de multiplicidad impar, cambiará de signo

d. La curva de signos no cambiará de signo al pasar por una raíz de multiplicidad impar.

5.- Identificar el intervalo o los intervalos solución como la unión de las zonas y puntos requeridos por la relación de orden de la desigualdad.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA:

01. Si T es el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{x-a^2}{b^2+c^2}+\frac{x-b^2}{c^2+a^2}+\frac{x-c^2}{a^2+b^2}\leq 3$$

$\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$ - {0}
entonces el conjunto T es :
A) $]-\infty; a+b+c]$
B) $]-\infty; abc]$
C) $[abc; +\infty[$
D) $]-\infty; a^2+b^2+c^2]$
E) $]-\infty; 3]$

SOLUCIÓN:

Restando uno a cada fracción:

$$\frac{x-a^2}{b^2+c^2}-1+\frac{x-b^2}{c^2+a^2}-1+\frac{x-c^2}{a^2+b^2}-1\leq 0$$

$$\frac{x-a^2-b^2-c^2}{b^2+c^2}+\frac{x-a^2-b^2-c^2}{c^2+a^2}+\frac{x-a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2}\leq 0$$

Factorizando:

$$(x-a^2-b^2-c^2)\left[\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right]\leq 0$$

$$\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}>0 \quad \rightarrow (x-a^2-b^2-c^2)\leq 0 \quad \rightarrow x\leq a^2+b^2+c^2$$

CLAVE D

PROBLEMA:

02. Si x $\in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$, calcular el mayor valor de M que satisface la desigualdad:

$$M \leq \frac{x+2}{x-2}$$

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{3}{2}$

D) $-\frac{5}{3}$ E) $-\frac{3}{5}$

SOLUCIÓN:

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} \leq x-2 \leq -\frac{1}{2}$$

$$-2 \leq \frac{1}{x-2} \leq -\frac{2}{3}$$

$$-8 \leq \frac{4}{x-2} \leq -\frac{8}{3}$$

$$-7 \leq \frac{4}{x-2}+1 \leq -\frac{5}{3}$$

$$-7 \leq \frac{x+2}{x-2} \leq -\frac{5}{3}$$

PROBLEMA:

05. Determine el conjunto solución de :

$$\frac{x-b}{x-a} < \frac{a}{b}; \text{ si } 0 < a < b$$

A)]a; b[B)]b; a+b[C)]a; a+b[
D)]a-b; a+b[E)]0; b[

SOLUCIÓN:

$$\frac{x-b}{x-a} - \frac{a}{b} < 0$$

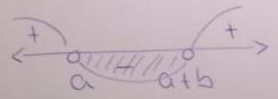
$$\frac{b(x-b) - a(x-a)}{b(x-a)} < 0$$

$$\frac{(b-a)x + a^2 - b^2}{b(x-a)} < 0$$

$$\frac{(b-a)\left[x - (a+b)\right]}{b(x-a)} < 0$$

ya que $b > a > 0 \rightarrow b-a > 0$
$\rightarrow b > 0$

$$\Rightarrow \frac{x-(a+b)}{x-a} < 0$$



$x \in\ ]a; a+b[$

PROBLEMA:

07. Calcule las soluciones negativas de la inecuación:

$$\frac{(x^2-2x-35)(x+2)(x^3-1)}{x^5+2x^3-x^2-2} \ge 0$$

A) $\mathbb{R}^-$ B)]-7; 0[

C) [-5; -1[D)]-1; 0[

E) [-5; -2]

SOLUCIÓN:

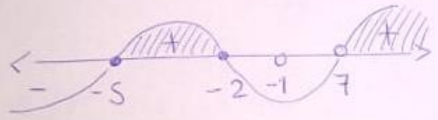
07 FACTORIZANDO

$$\frac{(x-7)(x+5)(x+2)\cancel{(x-1)}\cancel{(x^2+x+1)}}{\underbrace{(x^3-1)}_{\cancel{(x-1)}\cancel{(x^2+x+1)}}(x^2+2)} \ge 0$$

$x-1 \ne 0 \rightarrow x \ne 1$

$$\frac{(x-7)(x+5)(x+2)}{x^2+2} \ge 0$$

Raíces: 7 ; -5 ; -2



$x \in [-5; -2] \cup]7; \infty^+[$

Soluciones negativas

[-5 ; -2]

PROBLEMA:

08. Resolver la inecuación :

$$\frac{(x+8)(x+3)(x-5)^9(x-7)^4(x+5)^2}{(x-5)^3(x-7)(x+5)^{668}x^5} \le 0$$

y dar como respuesta la suma de los elementos enteros de su C.S.

A) -12 B) 0 C) -7

D) -5 E) 8

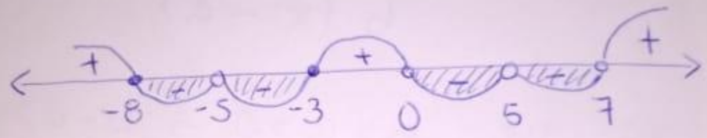
SOLUCIÓN:

(08) Simplificando

$$\frac{(x+8)(x+3)(x-5)^6(x-7)^3}{(x+5)^{666}x^5} \le 0$$

Además: $x \neq 5 \wedge x \neq 7$

$\wedge\ x \neq -5 \wedge x \neq 0$



$x \in [-8;-3] - \{-5\} \cup]0;7[- \{5\}$

Elementos enteros:

$\{-8, -7, -6, \cancel{-5}, -4, -3\}$

$\{1, 2, 3, 4, \cancel{5}, 6\}$

Suma: -12

PROBLEMA:

10. Resolver:

$$(x + 3)^2(x - 3)^5(2x - 1)^2(1 - 2x)^9(5 - x) \geq 0$$

e indicar su conjunto solución.

A) $\left[\frac{1}{2}; 3\right[$

B) $\left[\frac{1}{2}; 3\right] \cup [5; +\infty[$

C) $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$

D) $\left[\frac{1}{2}; 3\right] \cup [5; +\infty[\cup \{-3\}$

E) $[-3; 3] \cup [5; +\infty[$

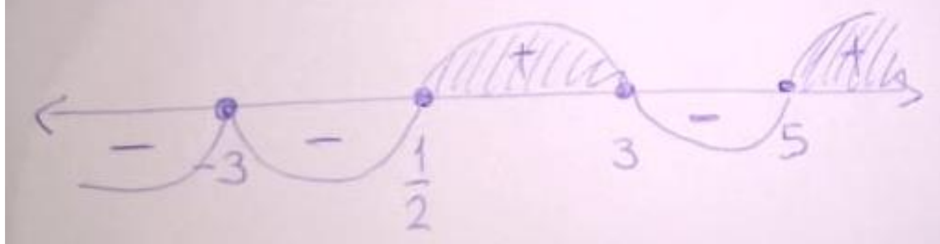
SOLUCIÓN:

(10)

$$(x+3)^2(x-3)^5(2x-1)^2(1-2x)^9(5-x) \geq 0$$

$$(x+3)^2(x-3)^5(2x-1)^2(2x-1)^9(x-5) \geq 0$$

$$(x+3)^2(x-3)^5(2x-1)^{11}(x-5) \geq 0$$



$$C.S. = \left[\frac{1}{2}; 3\right] \cup [5; +\infty[$$

PROBLEMA:

11. Dados los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R}^+ / x(2x + 1)(x - 2)(2x - 3) > 63\}$

$B = \left\{x \in \mathbb{R}^{-1} \middle/ \frac{x}{1-x} \leq \frac{x-3}{2-x}\right\}$

hallar: $A \cup B$

A) $[3; +\infty[$ B) Φ C) $]-2; +\infty[$

D) $]-1; 1[$ E) $[-4; 4]$

SOLUCIÓN:

(11) $A = \{ x \in \mathbb{R}^+ / x(2x+1)(x-2)(2x-3) \geq 63 \}$

$(2x^2 - 3x)(2x^2 - 3x - 2) \geq 63$

$(2x^2 - 3x)^2 - 2(2x^2 - 3x) - 63 \geq 0$

$2x^2 - 3x \qquad -9$

$2x^2 - 3x \qquad +7$

$(2x^2 - 3x - 9)(2x^2 - 3x + 7) \geq 0$

$(2x+3)(x-3)(2x^2 - 3x + 7) \geq 0$

$+ \quad -\frac{3}{2} \quad - \quad 3 \quad +$

$A = [3; \infty^+[$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \;/\; \frac{x}{1-x} \leq \frac{x-3}{2-x} \right\}$$

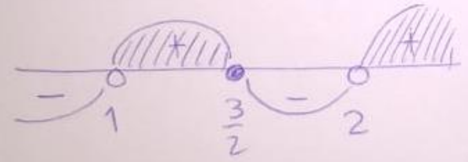
$$\frac{x}{1-x} + 1 \leq \frac{x-3}{2-x} + 1$$

$$\frac{1}{1-x} \leq \frac{-1}{2-x}$$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-x} \leq 0$$

$$\frac{3-2x}{(x-2)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{2x-3}{(x-2)(x-1)} \geq 0$$



$$B = \emptyset$$

$$\therefore\ A \cup B = [3; \infty^{+}[$$

PROBLEMA:

12. Resolver:

$$\frac{(x-1)^{30}(x+2)^{3}}{(x^{2}+x+2)(x-5)} > 0$$

Si la solución es: $S=(\mathbb{R} - \langle a, b]) \cup \{1\}$, dar el valor de $T=b-a$

A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

SOLUCIÓN:

(12)

$$\frac{(x-1)^{30}(x+2)^{3}}{(x^{2}+x+2)(x-5)} \geq 0$$

$$S = \underbrace{]-\infty; -2] \cup]5; \infty^{+}[}\ \cup \{1\}$$

$$S = (\mathbb{R} -]-2;5]) \cup \{1\}$$

$$\therefore \quad a=-2 \quad \wedge \quad b=5$$

$$T = b-a = 7$$

PROBLEMA:

13. El conjunto:

$$A=\left\{ m\in\mathbb{R} \,/\, \frac{1}{x+11} < m < x^2 + 2\,003;\ \forall\, x > -1 \right\}$$

es igual a:

A) $\left]\frac{1}{10};\ 2\,003\right[$

B) $\left[\frac{1}{10};\ 2\,003\right]$

C) $\left[\frac{1}{10};\ 2\,003\right[$

D) $\left]\frac{1}{10};\ 2\,004\right[$

E) $\left[\frac{1}{10};\ 2\,004\right[$

SOLUCIÓN:

13 $\quad A=\left\{ m\in\mathbb{R} \,/\, \frac{1}{x+11} < m < x^2+2003 \right\}$

$\forall\, x > -1$

$x > -1$

$x+11 > 10$

$0 < \frac{1}{x+11} < \frac{1}{10}$

$\Rightarrow m \geq \frac{1}{10}$

$x > -1$

$x^2 \geq 0$

$x^2 + 2003 \geq 2003$

$\Rightarrow m < 2003$

$\Rightarrow m \in \left[\frac{1}{10};\ 2003\right[$

PROBLEMA:

14. Dadas las fracciones:

$$a=\frac{2n+1}{2n+2};\ b=\frac{3n+1}{3n+2};\ c=\frac{4n+1}{4n+2}$$

para $n \in Z^{+}$, se cumple que:

A) $b > a > c$ B) $c > b > a$ C) $a > b > c$

D) $c > a > b$ E) $b > c > a$

SOLUCIÓN:

14

$n \in \mathbb{Z}^{+} \rightarrow n > 0$

$\rightarrow 4n > 3n > 2n > 0$

$4n+2 > 3n+2 > 2n+2 > 2$

$$0 < \frac{1}{4n+2} < \frac{1}{3n+2} < \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2}$$

$$-1 < \frac{-4n-1}{4n+2} < \frac{-3n-1}{3n+2} < \frac{-2n-1}{2n+2} < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{3n+1}{3n+2} < \frac{4n+1}{4n+2} < 1$$

$a < b < c$

PROBLEMA:

15. Dados los conjuntos:

$$A=\{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{(x+3)^3(x+1)^6(27-x)^3}{(x-3)(x^2-4x+5)} \leq 0\}$$

$B=\{x \in \mathbb{R} \ / \ 2x^3+3x^2-2x-3 > 0\}$

determine A Δ B

A) $\left[-3;\ \frac{3}{2}\right] \cup [3;\ +\infty[$

B) $[-3;\ +\infty[- \{3\}$

C) $[-1;1] \cup [3;\ +\infty[$

D) $[-3;\ -1] \cup [1;\ 3]$

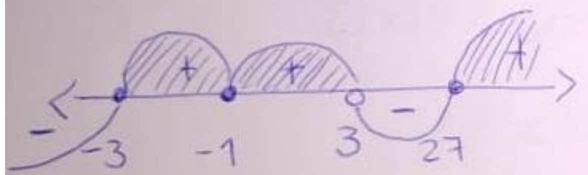
E) $\left[-3;\ -\frac{3}{2}\right] \cup [-1;\ 1] \cup \{3\}$

SOLUCIÓN:

15

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{(x+3)^3(x+1)^6(27-x)^3}{(x-3)(x^2-4x+5)} \leq 0\}$$

$$\frac{(x+3)^3(x+1)^6(x-27)^3}{(x-3)(x^2-4x+5)} \geq 0$$



$A = [-3; -1] \cup [-1; 3[\cup [27; +\infty[$

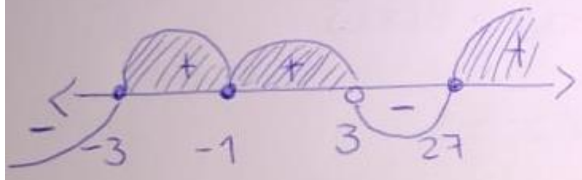
$A = [-3; 3[\cup [27; +\infty[$

PITAGORAS ACADEMIA

15

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;/\; \frac{(x+3)^3 (x+1)^6 (27-x)^3}{(x-3)(x^2-4x+5)} \le 0 \right\}$$

$$\frac{(x+3)^3 (x+1)^6 (x-27)^3}{(x-3)(x^2-4x+5)} \ge 0$$



$$A = [-3; -1] \cup [-1; 3[\cup [27; +\infty[$$

$$A = [-3; 3[\cup [27; +\infty^{+}[$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 > 0 \}$$

$$(x^2 - 1)(2x+3) > 0$$

$$(x+1)(x-1)(2x+3) > 0$$

$$B = \left] -\frac{3}{2}; -1 \right[\cup \left] 1; \infty^{+} \right[$$

$$\therefore \; A \,\Delta\, B = \underbrace{(A - B)} \cup \underbrace{(B - A)}$$

$$\left[-3; -\frac{3}{2}\right] \cup [-1; 1] \cup [3; 27[$$

PROBLEMA:

SOLUCIÓN:

16. Sean los números positivos : $x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots; x_n$, tal que : $x_1x_2x_3 \ldots\ldots x_n = 1$. Si :

$$S = \frac{\prod_{k=1}^{n}(x_k + 2k)^2}{n!}$$

podemos afirmar que :

(16)

$$\prod_{k=1}^{n}(x_k+2k)^2 = (x_1+2)^2(x_2+4)^2(x_3+6)^2 \ldots (x_n+2n)^2$$

$$x_1 + 2 \geq 2\sqrt{2x_1} \rightarrow (x_1+2)^2 \geq 4(2x_1)$$

$$x_2 + 4 \geq 2\sqrt{4x_2} \rightarrow (x_2+4)^2 \geq 4(4x_2)$$

$$\vdots$$

$$(x_n+2n)^2 \geq 4(2nx_2)$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x_k+2k)^2 \geq 8^n . n! \underbrace{x_1x_2x_3 \ldots x_n}_{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\prod_{k=1}^{n}(x_k+2k)^2}{n!} \geq 8^n$$

PROBLEMA:

SOLUCIÓN:

17. Luego de resolver la inecuación:

$$\frac{(x^4+a)^5(x^2-b)^3}{(x^4+b)(x^2-a)^7} \le 0; \quad a < b < 0$$

dar como respuesta un intervalo solución

A) $[-\sqrt[4]{-a}; \sqrt[4]{-b}[$

B) $]-\sqrt[4]{-b}; \sqrt[4]{-b}[$

C) $]\sqrt[4]{-b}; \sqrt[4]{-a}]$

D) $[-\sqrt[4]{-a}; \sqrt[4]{-a}]$

E) $]-\sqrt{-a}; \sqrt[4]{-a}[$

17

$$\frac{(x^4+a)^5(x^2-b)^3}{(x^4+b)(x^2-a)^7} \le 0$$

$a < b < 0$

↳ $x^4 + a$ tiene 2 raíces reales

$\sqrt[4]{-a} \wedge -\sqrt[4]{-a}$

↳ $x^2 - b$ no tiene raíces reales

↳ $x^4 + b$ tiene 2 raíces reales

$\sqrt[4]{-b} \wedge -\sqrt[4]{-b}$

↳ $x^2 - a$ no tiene raíces reales

C.S = $[-\sqrt[4]{-a}; -\sqrt[4]{-b}[\cup]\sqrt[4]{-b}; \sqrt[4]{-a}]$

PROBLEMA:

18. Si x_1, x_2 y x_3 son las raíces positivas de:

$$P(x) \equiv 9x^3 - ax^2 + bx - 1$$

tal que:

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} = \frac{1}{2};$$

resolver la inecuación $P(x) \leq 0$ y dar como respuesta un valor que verifique dicha inecuación.

A) 0,41 B) 0,39 C) 0,73

D) 0,58 E) 1,37

SOLUCIÓN:

18 Se sabe:

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{1}{9}$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^+$$

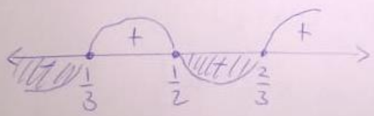
$$\rightarrow \frac{\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_2}{3} \cdot \frac{x_3}{4}}$$

$$\underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{3}}_{\frac{1}{6}} \geq \underbrace{\sqrt[3]{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}}_{\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{4} = \frac{1}{6}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \wedge x_2 = \frac{1}{2} \wedge x_3 = \frac{2}{3}$$

$$P_{(x)} \leq 0$$



$$]-\infty ; \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{1}{2} ; \tfrac{2}{3}]$$

Rpta: 0,58

PROBLEMA:

19. Si A, B y C son tres conjuntos definidos por:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-3x+2} < \frac{1}{2x-x^2}\right\}$$

$B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, (x+1)(2x-5)x^2 \leq 0\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \notin (A - B) \Rightarrow x \in B\}$

entonces el conjunto C es:

A) $\left]\frac{5}{2}; 3\right[$ B) $]0; 1[$ C) $[-1; 3[$

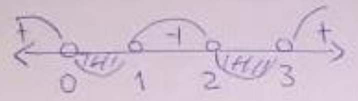
D) $\left]0; \frac{5}{2}\right]$ E) $]0; 3]$

SOLUCIÓN:

(19) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{x(x-2)} < 0\right\}$

$$\frac{x-2-x+x-1}{x(x-1)(x-2)} < 0$$

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x-2)} < 0$$



$A =]0;1[\cup]2;3[$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(2x-5)x^2 \le 0 \}$$

$$B = [-1; \tfrac{5}{2}]$$

$$C = \{ x \notin (A-B) \to x \in B \}$$

$$\sim (x \notin (A-B)) \vee x \in B$$

$$x \in (A-B) \vee x \in B$$

$$x \in (A \cup B)$$

$$C = A \cup B = [-1; 3[$$